

月天心の謎

和田 英一 (IIJ 技術研究所)

wada@u-tokyo.ac.jp

月天心

月天心貧しき町を通りけり (句集 529)

蕪村句集にある与謝蕪村 (1716–1783) の有名な句である。蕪村自筆句帳には合点がないらしい。

冬の満月は天頂近くに煌々と輝き、夏の満月は低いのでお月見に適しているといわれる。なぜそうなのか。以前から満月は太陽の反対側にあり、太陽が高ければ満月は低くなると単純に考えていた。ウェブをサーチしてもそういう説明に出会う。

東京を北緯 35 度とする。南を向くと天の赤道は高度 55 度のあたりにある。オリオンの三ツ星の一番上のが殆んど天の赤道にある。月の赤緯は南北 28 度くらい離れることがあるから、月の最高高度は 83 度、最低は 27 度になる。

実際に 2005 年と 2006 年の 1 年間の月の赤緯をプロットし、満月の日には丸を書いたのが図 0 である。縦線は各月 1 日の位置を示す。これを見ると確かに 6 月の満月の赤緯は低く、12 月は高い。

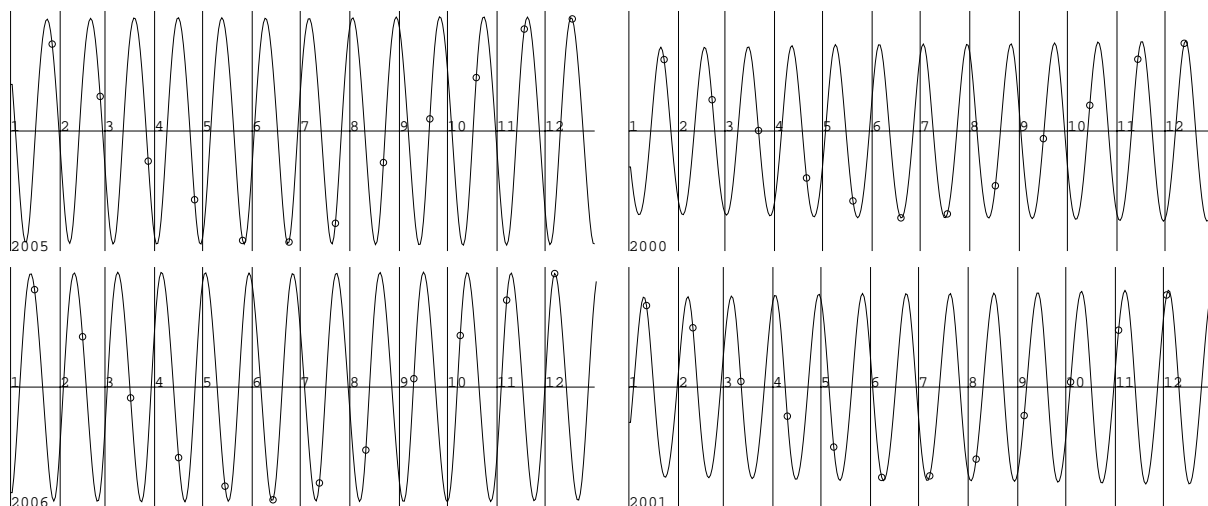


図 0

図 1

プロットの仕方か海上保安庁海洋情報部のウェブのページ [0] から「天文と暦」へ行き、「天体位置表」をみるとそこに 2005 年と 2006 年のコンピュータ用月位置計算式の計算用数値 (テキスト) というのがあったので、それを利用して毎日の月の赤緯を算出した。計算には「解説と計算例」という pdf が有用であった。もちろん結果は手元の天文年鑑の値と比較した。

また天文測地情報のところに月の満欠けの表があるので、満月の日を手で抜き出した。それから postscript のプログラムを書き、図 0 を作った。

しかしこれだけでは心配なので、もう少し前の様子も知りたい。

Calendrical Calculations という暦に関するアルゴリズムの本がある [1]。

それに月の黄経、黄緯 (lunar longitude, lunar latitude) を計算する式と数値が載っていた。しかしこれから赤緯を計算する方法がすぐには分からなかった (実は後述のように簡単であった) ので、いろいろ眺めていると、ある時刻のある地点における月の高度を計算する式を見つけた。それをよく見ると当然のことながら月の赤緯 (lunar declination) を途中の値として計算している。そこでその値を流用して、2000 年、2001 年の月の赤緯の値を得た。そして描いたのが図 1 である。

これらの計算式は長い多項式なので、数値を手で入力できるようなものではなく、電子的にコピーする元を探すのが大仕事である。

ところで図 1 は図 0 と比べてみると、振幅が少し小さい。白道は黄道に対して 5 度程度傾いているので、黄道傾斜角 (obliquity) の 23.5 度より大きかったり小さかったりする。

調べてみると表 0 のようにずいぶん違うことが分かった. なお図 1 の 2000 年の部分は 3 月から後が直下の 2001 年のより 1 日右にずれているのが見える.

year	max	min
2000	22.56	-22.54
2001	24.18	-24.12
2005	28.54	-28.52
2006	28.72	-28.69

表 0 月の赤緯の最大最小

球面三角法

球面三角法は球上の大円で作られる三角形の角度と辺 (といっても中心から辺を見込む角度) の間の式のことである. ウェブを探すと多くの導き方が見つかる. エレガントなのは以下の通り. 頂点 A を z 軸に合わせ, 頂点 B を zx 平面におき, 頂点 C の座標をとる.

$$x = \sin b \cos A, \quad y = \sin b \sin A, \quad z = \cos b$$

次に三角形を y 軸を中心に角度 c だけ向う回転し, 頂点 B を z 軸に合わせ, C の座標をとる.

$$x' = \sin a \cos(\pi - B) = -\sin a \cos B, \quad y' = \sin a \sin(\pi - B) = \sin a \sin B, \quad z' = \cos a$$

一方 x, z を c だけ負の方向へ回転すると $x' = x \cos c - z \sin c$, $z' = z \cos c + x \sin c$ だから

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \text{ (正弦の式)}, \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \text{ (余弦の式)}$$

が得られる.

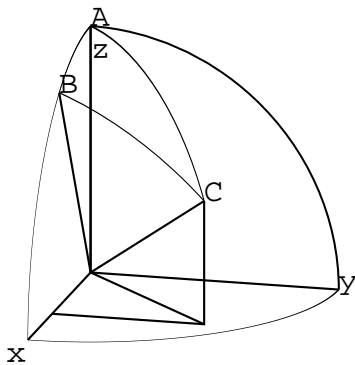


図 2

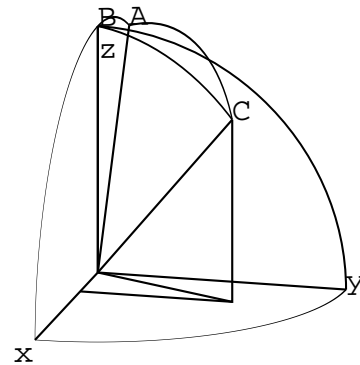


図 3

満月の位置

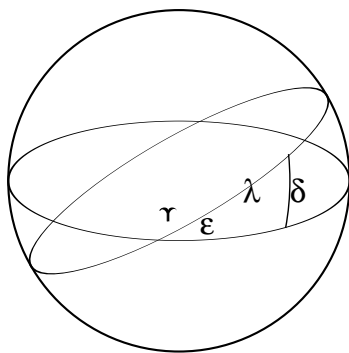


図 4

ε: 黄道傾斜角
λ: 月の黄経
δ: 月の黄緯
γ: 春分点

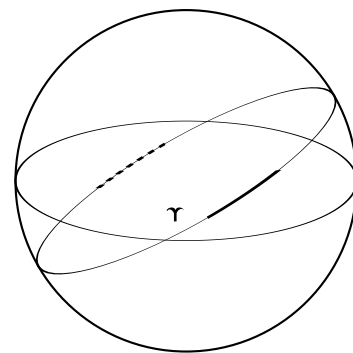


図 5

γ: 春分点

[1] によると月の赤緯 (δ) は黄経 (λ), 黄緯 (β), 黄道傾斜角 (ε) から

$$\delta = \arcsin(\sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda)$$

と得られる. とりあえず月の黄緯 (β) があまり大きくないとすれば

$$\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda$$

となり, これは球面三角法の正弦の式

$$\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{\sin \lambda}{\sin \angle R}$$

から導ける.

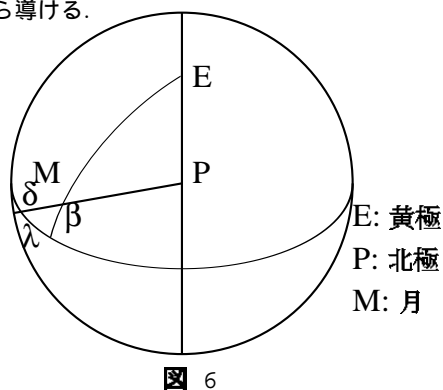


図 6

一方, 先の式は北極から見下ろした図 6 を描くと, 北極, 黄極, 月で構成する三角形に球面三角法の余弦の式を使い,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cos \epsilon + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \sin \epsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

から得られる.

要するに太陽は黄道を 1 年かけて一巡し, 月は 1 月で一巡する. 図 5 で太陽が黄道上を 1 月に移動する部分を実線で表すと, その間に月はほぼ一周し, ちょうど反対側の破線部分で黄経の差が 180 度になったときに満月になる. 従って月と太陽の赤緯は反対になるのは当然であった.

冬の空の話をしてきたが, 月天心は秋の句であり, 蕪村句集には明和 5 年 (1768 年)8 月 2 日とある. 冬の月の句には

寒月や門なき寺の天高し (句集 843)

寒月や門をたゞけば沓の音 (遺稿 504)

などがある.

参考文献

[0] 海上保安庁: <http://www1.kaiho.mlit.go.jp/>.

[1] E. M. Reingold, N. Dershowitz: Calendrical Calculations: The Millenium Edition, Cambridge University Press, 2001.