月天心の謎

和田 英一 (IIJ 技術研究所)
wada@u-tokyo.ac.jp

月天心

月天心貧しき町を通りけり (句集 529)

蕪村句集にある与謝蕪村 (1716–1783) の有名な句である. 蕪村自筆句帳には合点がないらしい.

冬の満月は天頂近くに煌々と輝き, 夏の満月は低いのでお月見に適しているといわれる. なぜそうなのか. 以前から満月は太陽の反対側にあり, 太陽が高ければ満月は低くなると単純に考えていた. ウェブをサーチしてもそういう説明に出会う.

東京を北緯 35 度とする. 南を向くと天の赤道は高度 55 度のあたりにある. オリオンの三ツ星の一番上のが殆んど天の赤道上にある. 月の赤緯は南北 28 度くらい離れることがあるから, 月の最高高度は 83 度, 最低は 27 度になる.

実際に 2005 年と 2006 年の 1 年間の月の赤緯をプロットし, 満月の日には丸を書いたのが図 0 である. 縦線は各月 1 日の位置を示す. これを見ると確かに 6 月の満月の赤緯は低く, 12 月は高い.

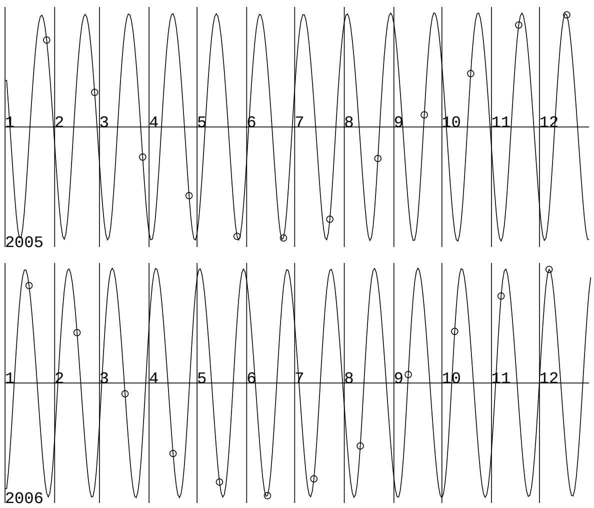

図 0

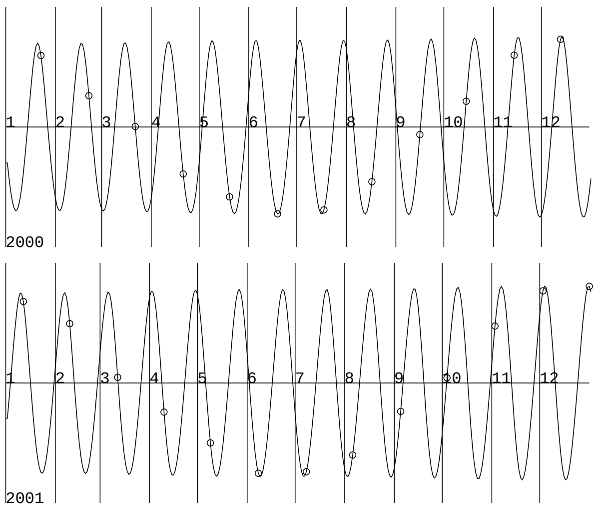

図 1

プロットの仕方だか海上保安庁海洋情報部のウェブのページ [0] から「天文と暦」へ行き, 「天体位置表」をみるとそこに 2005 年と 2006 年のコンピュータ用月位置計算式の計算用数値 (テキスト) というのがあったので, それを利用して毎日の月の赤緯を算出した. 計算には「解説と計算例」という pdf が有用であった. もちろん結果は手元の天文年鑑の値と比較した.

また天文測地情報のところに月の満欠けの表があるので, 満月の日を手で抜き出した. それらから postscript のプログラムを書き, 図 0 を作った.

しかしこれだけでは心配なので, もう少し前の様子も知りたい.

Calendrical Calculations という暦に関するアルゴリズムの本がある [1].

それに月の黄経, 黄緯 (lunar longitude, lunar latitude) を計算する式と数値が載っていた. しかしこれから赤緯を計算する方法がすぐには分からなかった (実は後述のように簡単であった) ので, いろいろ眺めていると, ある時刻のある地点における月の高度を計算する式を見つけた. それをよく見ると当然のことながら月の赤緯 (lunar declination) を途中の値として計算している. そこでその値を流用して, 2000 年, 2001 年の月の赤緯の値を得た. そして描いたのが図 1 である.
これらの計算式は長い多項式なので, 数値を手で入力できるようなものではなく, 電子的にコピーする元を探すのが大仕事である.

ところで図 1 は図 0 と比べてみると, 振幅が少し小さい. 白道は黄道に対して 5 度程度傾いているので, 黄道傾斜角 (obliquity) の 23.5 度より大きかったり小さかったりする.

調べてみると表 0 のようにずいぶん違うことが分かった. なお図 1 の 2000 年の部分は 3 月から後が直下の 2001 年のより 1 日右にずれているのが見える.

year	max	min
2000	22.56	−22.54
2001	24.18	−24.12
2005	28.54	−28.52
2006	28.72	−28.69

表 0　　月の赤緯の最大最小

球面三角法

球面三角法は球上の大円で出来る三角形の角度と辺 (といっても中心から辺を見込む角度) の間の式のことである. ウェブを探すと多くの導き方が見つかる. エレガントなのは以下の通り. 頂点 A を z 軸に合わせ, 頂点 B を zx 平面におき, 頂点 C の座標をとる.

$$x = \sin b \cos A, \quad y = \sin b \sin A, \quad z = \cos b$$

次に三角形を y 軸を中心に角度 c だけ向う回転し, 頂点 B を z 軸に合わせ, C の座標をとる.

$$x' = \sin a \cos(\pi - B) = -\sin a \cos B, \quad y' = \sin a \sin(\pi - B) = \sin a \sin B, \quad z' = \cos a$$

一方 x, z を c だけ負の方向へ回転すると $x' = x \cos c - z \sin c, \quad z' = z \cos c + x \sin c$ だから

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A(\text{正弦の式}), \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A(\text{余弦の式})$$

が得られる.

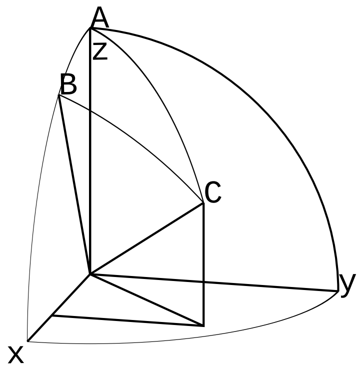

図 2

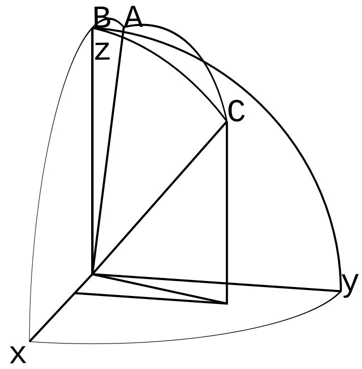

図 3

満月の位置

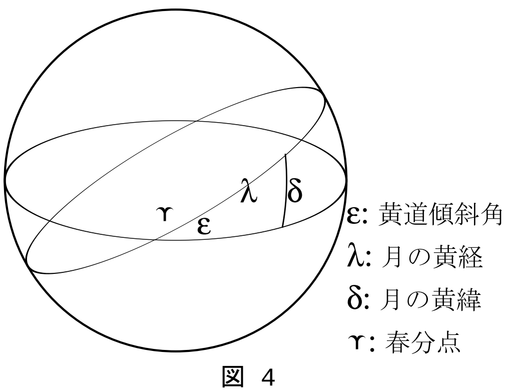

図 4

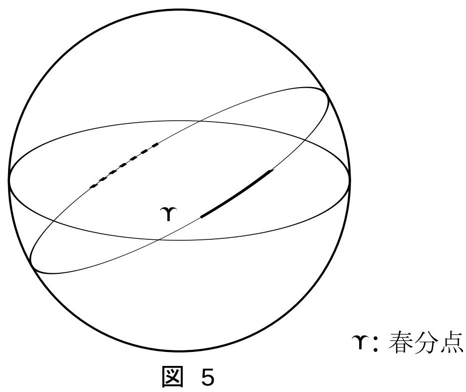

図 5

[1] によると月の赤緯 (δ) は黄経 (λ), 黄緯 (β), 黄道傾斜角 (ϵ) から

$$\delta = \arcsin(\sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda)$$

と得られる．とりあえず月の黄緯 (β) があまり大きくないとすれば

$$\sin\delta = \sin\epsilon\sin\lambda$$

となり, これは球面三角法の正弦の式

$$\frac{\sin\delta}{\sin\epsilon} = \frac{\sin\lambda}{\sin\angle\mathrm{R}}$$

から導ける．

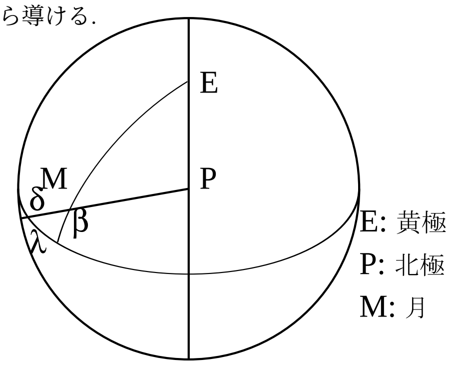

図 6

一方, 先の式は北極から見下ろした図 6 を描くと, 北極, 黄極, 月で構成する三角形に球面三角法の余弦の式を使い,

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\delta) = \cos(\frac{\pi}{2}-\beta)\cos\epsilon + \sin(\frac{\pi}{2}-\beta)\sin\epsilon\cos(\frac{\pi}{2}-\lambda)$$

から得られる．

要するに太陽は黄道を 1 年かけて一巡し, 月は 1 月で一巡する．図 5 で太陽が黄道上を 1 月に移動する部分を実線で表すと, その間に月はほぼ一周し, ちょうど反対側の破線部分で黄経の差が 180 度になったときに満月になる．従って月と太陽の赤緯は反対になるのは当然であった．

冬の空の話をしてきたが, 月天心は秋の句であり, 蕪村句集には明和 5 年 (1768 年)8 月 2 日とある．冬の月の句には
　寒月や門なき寺の天高し (句集 843)
　寒月や門をたゝけば沓の音 (遺稿 504)
などがある．

参考文献

[0] 海上保安庁: `http://www1.kaiho.mlit.go.jp/`.

[1] E. M. Reingold, N. Dershowitz: Calendrical Calculations: The Millenium Edition, Cambridge University Press, 2001.