島内の万年七曜表

和田 英一 (IIJ 技術研究所)
wada@u-tokyo.ac.jp

島内七曜表とその使用例

数学セミナー 1978 年 7 月号に島内剛一先生が寄稿された万年七曜表は力作であった [0]. その最後に共点計算図表方式の万年七曜表がある. そのメカニズムを説明するのが拙稿の目的である.

その七曜表は, 島内さんの元の図は多少違うが, 図 0 のようなものである.

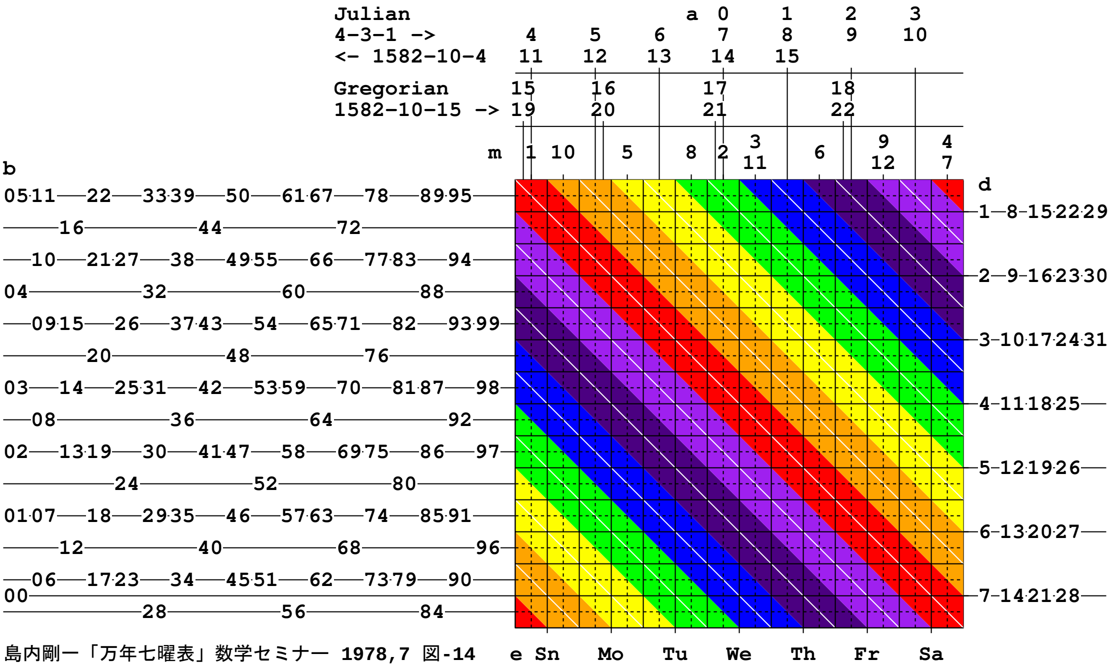

図 0

図の彩色部分が計算図表で, 左から右, 下から上へ共に 0 から 7 の mod 7 の部分を示し, 上下端, 左右端同士がそれぞれつながってトーラス状態になっていると考える.

y 年 m 月 d 日のうち, y を上 2 桁と下 2 桁にわけ, それぞれ a, b とする. 左の欄外は b の部分を示す. 上の欄外は 3 段に分かれ, 上から Julian 暦 (西暦 4 年 3 月 1 日から 1582 年 10 月 4 日まで) の a, Gregorian 暦 (西暦 1582 年 10 月 15 日から) の a, m を示す. 右の欄外は d を示す. 最後に下の欄外 e が求める曜日である.

使い方をまず説明しよう. 2006 年 6 月 30 日の曜日を知りたいとする. 西暦年を上 2 桁 a と下 2 桁 b に分け, $a = 20, b = 6$ となる. 図の左の 2 桁の数がたくさん書いてある b 部分で 06 は左下近くにあり, そこから右へ進む. 計算図表の最左端に到達したらそこから右下方向へ (橙色の帯の下部分を) 辿る. これは mod 7 の図なので, 下端に達したらその真上 (10 と書いてある位置) へ移動し, そこからさらに右下へ橙色を辿る. 上の欄外に Gregorian とある領域 a から上 2 桁の 20 を探し, 斜めに移動中の線との交点を見つける. 左から 1.375, 上から 0.625 のところで交差する. 次にここから左右に, 図表のすぐ上の欄外 m に 6(月) と書いてある真下まで移動する. 右の方, 青の帯の中で交差するのが分かる. ここで丸めを行ない, 青の帯の中心の白線に移る. 図表の右の欄外 d は日付けなので, その 30(日) から左に辿り, 青の帯の中心に到達したら, その点の真下を見る. Fr と書いてあるので, 2006 年 6 月 30 日は金曜と判明する.

計算法

うるう年, 月の大小に関係なく曜日は規則正しく繰り返す事実を利用する. Julian 暦がずっと昔まで続いていたと仮定し, 西暦 -4712 年 1 月 1 日を 0 とする通日を Julian Date(ユリウス通日, 以下 JD) という. ある日の JD が分かれば曜日は判明する.

西暦 y 年 m 月 d 日の JD は y 年 1 月 0 日の JD に年初から m 月 0 日までの通日と d を足したものである.

年初から m 月 0 日までの通日を表 0 に示す. この値を $h(m)$ という.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平年	0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
閏年	0	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335

表 0　年初から m 月 0 日までの通日 $h(m)$

Julian 暦 y 年 1 月 0 日の JD を計算してみる. -4712 年から $y-1$ 年までは $y+4712$ 年ある. その間のうるう年の回数は

$$\lceil\frac{y+4712}{4}\rceil = \lfloor\frac{y+4715}{4}\rfloor = \lfloor\frac{y-1}{4}\rfloor + \frac{4716}{4} = \lfloor\frac{y-1}{4}\rfloor + 1179$$

だから y 年 1 月 1 日の JD は

$$365(y+4712) + \lfloor\frac{y-1}{4}\rfloor + 1179 = 365y + \lfloor\frac{y-1}{4}\rfloor + 1721059$$

y 年 1 月 0 日の JD は 1 を引いて

$$365y + \lfloor\frac{y-1}{4}\rfloor + 1721058$$

Gregorian 暦への改暦の前日 (1582 年 10 月 4 日) の JD は (この年は平年)

$$365 \times 1582 + \lfloor\frac{1582-1}{4}\rfloor + 1721058 + 273 + 4 = 577430 + 395 + 1721058 + 273 + 4 = 299160$$

である.

Gregorian 暦 y 年 1 月 0 日の JD を求める場合, 考慮すべきはそれまでの年の累積である. 違いは 400 年に 3 回うるう年を置かないことで, 1700 年, 1800 年, 1900 年は 4 で整除できるけれども平年とするから 1700 年代にくらべ, 1800 年代は 1 日少なくしなければならない. 以下 $y = 100a + b, 0 \le b < 100$ とし, 下の式の $-\lfloor 3(a+1)/4\rfloor$ で補正する. a の値に対し表 1 のようになる.

a	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	-12	-13	-14	-15	-15	-16	-17	-18	-18

表 1　$-\lfloor 3(a+1)/4\rfloor$

これを使うと 1800 年, 1900 年になった途端に前年までの累計が 1 日減るがそれは 1901 年から効果を出して欲しい. そこで 1800 年, 1900 年のような, 100 の倍数で平年の年には特別に 1 を足す (以下 α で表す). 従って JD は

$$-\lfloor\frac{3(a+1)}{4}\rfloor + 365y + \lfloor\frac{y-1}{4}\rfloor + \alpha + 1721060$$

ただし

$$\alpha = \begin{matrix} 1 & b = 0 \text{ で平年の時} \\ 0 & \text{その他の時} \end{matrix}$$

で, h は平年, 閏年に応じて表 0 の値をとるものとする. 最後の整数は改暦で JD が接続するように選んである. 1582 年 10 月 15 日の JD は

$$-\lfloor\frac{3(15+1)}{4}\rfloor + 365 \times 1582 + \lfloor\frac{1582-1}{4}\rfloor + 0 + 1721060 + 273 + 15$$

$$= -12 + 577430 + 395 + 1721060 + 273 + 15 = 299161$$

となる.

Julian Date と曜日

JD 0 日は月曜日であった. 曜日を日曜を 0, 月曜を 1, . . ., 土曜を 6 と決め, これを e で表すと

$$e = (\mathrm{JD} + 1) \bmod 7$$

である. つまり Gregorian 暦では

$$e \equiv -\lfloor \frac{3(a+1)}{4} \rfloor + 365y\lfloor + \frac{y-1}{4} \rfloor + \alpha + h(m) + d + 1721061 \qquad \bmod 7$$

ところで

$$365 \equiv 1 \qquad \bmod 7$$

$$y = 100a + b \equiv 2a + b \qquad \bmod 7$$

$$\lfloor \frac{y-1}{4} \rfloor = \lfloor \frac{100a+b-1}{4} \rfloor = 25a + \lfloor \frac{b-1}{4} \rfloor \equiv 4a + \lfloor \frac{b-1}{4} \rfloor \qquad \bmod 7$$

$$1721061 \equiv 6 \qquad \bmod 7$$

だから

$$e \equiv -\lfloor \frac{3(a+1)}{4} \rfloor - a + 6 + b + \lfloor \frac{b-1}{4} \rfloor + \alpha + h(m) + d \qquad \bmod 7$$

$h(m)$ の表も mod 7 をとり, 1 月と 2 月の方を例外に扱うと表 2 が得られる. これを使うと $\lfloor (b-1)/4 \rfloor$ の -1 が不要になる.

<table>
<tr><td>m</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>平年</td><td>0</td><td>3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>閏年</td><td>-1</td><td>2</td></tr>
</table>

表 2　　1, 2 月を例外, 7 を法とする各月の 0 日の年初からの通日 $h(m)$

それにより a, b, m, d と e の関係は

$$e \equiv f(a) + g(b) + h(m) + d \qquad \bmod 7$$

$$f(a) \equiv -\lfloor \frac{3(a+1)}{4} \rfloor - a + 6 \qquad \bmod 7$$

$$g(b) \equiv b + \lfloor \frac{b}{4} \rfloor + \alpha \qquad \bmod 7$$

となる. $f(a)$ と mod を取る前の $g(b)$ は表 3, 表 4 のとおり.

$a \bmod 4$	0	1	2	3
$f(a)$	6	4	2	0

表 3　　$f(a)$ の値

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	. . .	95	96	97	98	99
$g(b)$	α	1	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	15	. . .	118	120	121	122	123

表 4　　$g(b)$ の値

自動修正

島内方式のユニークなのは, アナログ計算にしてうるう年の修正を自動化する点にある. まず $h(m)$ の表を, 0.25 引いたり (1 月と 2 月), 0.25 足したり (3 月以降) して表 5 にする. 一方 $g(b)$ の値はうるう年には 0.5 引いておく (表 6).

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h(m)$	6.75	2.75	3.25	6.25	1.25	4.25	6.25	2.25	5.25	0.25	3.25	5.25

表 5　　7 の法をとった通日に誤差を加えた

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	95	96	97	98	99
$g(b)$	α	1	2	3	*4.5*	6	7	8	*9.5*	11	12	13	*14.5*	...	118	*119.5*	121	122	123

表 6　　$g(b)$ の値に誤差を加えた

表 6 はイタリックの部分が表 4 と違っている. ここで $g(b)+h(m)$ を考えると, g が整数の場合 (平年) は $h(b)$ は ± 0.25 ずれているだけなので, 丸めると表 2 の値になる. 閏年は $g(b)$ が 0.5 少ないので, 0.25 多かった 3 月以降の月の h の値は 0.25 少ないだけなので, 元の値のまま. ただ 1, 2 月は $-0.25, -0.5$ で -0.75 の差になり, 丸めると 1 だけ少ない値になる. そして表 2 と一致する.

次に目ざわりな α も消したい. この働きは b が 0, a が 4 で整除出来ないときに 1, それ以外は 0 を足すものである. 通常は b が 0 なら $g(b)$ はうるう年だから -0.5 のはずであるが, 0.25 だけ下駄をはかせた.

これらの効果を見るために用意したのが表 7 である. 加減した誤差を 8 倍して記入してある. したがって $-5, -7$ は丸めで 1 引かれることになり, 100 年の倍数でうるう年になる年と, それ以外のうるう年の 1, 2 月が丸めで補正されることが理解できる.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">a mod 4</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1,2,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">-1</td><td colspan="2">$+1$</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">m</td><td>1,2</td><td>3–12</td><td>1,2</td><td>3–12</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$+2$</td><td>-2</td><td>$+2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b\ =\ 0$</td><td>-2</td><td>$\underline{-5}$</td><td>-1</td><td>-3</td><td>$+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b mod 4</td><td>0</td><td>0</td><td>-3</td><td>$+1$</td><td>-1</td><td>$+3$</td></tr>
<tr><td>1,2,3</td><td>-4</td><td>$\underline{-7}$</td><td>-3</td><td>$\underline{-5}$</td><td>-1</td></tr>
</table>

表 7　　誤差の累積の効果

共点計算図表

図 0 と同じでこの計算図表 (図 1) も mod 7 になっている. 原点を左下にとると左上から右下への 45 度の斜め線上の座標は $x+y=$ 一定 になっている.

最初の使用法に従うと, 年の下 2 桁から右へ行き左端に達したら右下へ進むとあった. 左端に達した高さを g とする. これが $(-f, x)$ で $-f$ の縦線と交わるとすると, $x-f=g$ である. これから $x=f+g$. 次にその交点から横に進み, h からの縦線と交わったとし, その点を通る斜め線で交わる $-d$ と e の交点を見つけると $h+x=e-d$ である. したがって $e=x+h+d=f+g+h+d$ が得られる.

しかし図 0 はもう少し面倒に出来ている. g, f, h, d, e の代りにそれぞれ $g+0.75, f-0.25, h+0.5, d-0.5, e+0.5$ に割り付けてある. したがって, 日曜が左端になく, 7 日も下端にない. これでもう一度計算すると $x-(f-0.25)=g+0.75$, 従って $x=f-0.25+g+0.75=f+g+0.5$. $x+(h+0.5)=(e+0.5)-(d-0.5), e+0.5=f+g+0.5+h+0.5+d-0.5, e=$

$f+g+h+d$ となる.

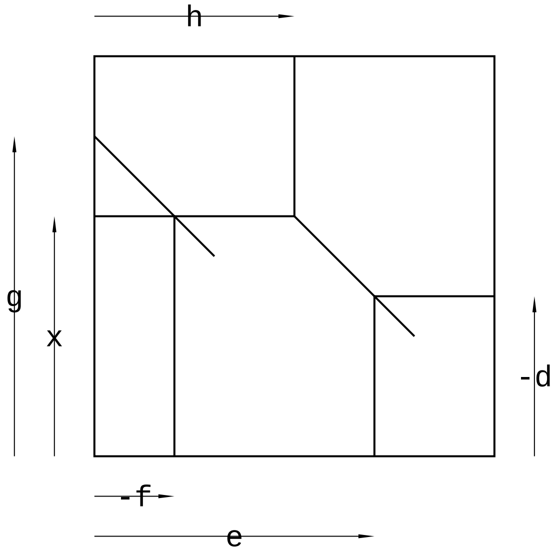

図 1

プログラム版

Gregorian 暦の部分だけを Haskell[1] と Scheme で書いたのが以下のプログラムである.

Haskell:

```
f, g, h :: Int -> Float
h m = [6.75,2.75,3.25,6.25,1.25,4.25,6.25,2.25,5.25,0.25,3.25,5.25]!!(m - 1)
g 0 = -0.25
g b = fromIntegral (b + c) - if d == 0 then 0.5 else 0
          where (c, d) = b ‘divMod‘ 4
f a = [5.875,4.125,2.125,0.125]!!(a ‘mod‘ 4)
dayOfWeek :: Int -> Int -> Int -> Int
dayOfWeek y m d = (round (f a + g b + h m) + d) ‘mod‘ 7
                    where (a, b) = y ‘divMod‘ 100
```

Scheme:

```
(define (dayofweek y m d)
  (define (h m)
    (list-ref ’(6.75 2.75 3.25 6.25 1.25 4.25 6.25 2.25 5.25 0.25 3.25 5.25)
      (- m 1)))
  (define (g b)
    (if (= b 0) -0.25
        (let ((c (quotient b 4)) (d (modulo b 4)))
          (+ b c (if (= d 0) -0.5 0)))))
  (define (f a) (list-ref ’(5.875 4.125 2.125 0.125) (modulo a 4)))
  (let ((a (quotient y 100)) (b (modulo y 100)))
    (modulo (+ (round (+ (f a) (g b) (h m))) d) 7)))
```

参考文献

[0] 島内剛一: 「万年七曜表」, 数学セミナー, 1978 年 7 月号, pp.35–48.

[1] 和田英一: 「暦法算法」, 情報処理学会誌, vol.47,no.1, pp.54–62.